ONDER-
ZOEK

HAN L.J. VAN DER MAAS, SANNE VAN DER VEN,
VERA VAN DER MOLEN

Oefenen op

Het Cijferspel in De Rekentuin

Hoe maakt u met de getallen 2, 3 en 9 en de basisoperaties het getal 16, waarbij alle getallen één keer gebruikt moeten worden? Los dit raadsel even op voor u verder leest... Dit spel is ook bekend als de 24 game[1], waarbij altijd vier getallen gebruikt worden en het antwoord altijd 24 is. In de jaren '90 speelde heel Nederland dit spel, met opgaven geprint op de achterkant van flippo's (zie afbeelding 1). Het Cijferspel van Rekentuin lijkt op de 24 game. Het oplossen van Cijferspelopgaven vereist hoofdrekenen maar vooral ook rekeninzicht. De getallen 2, 3 en 9 zijn op vele manieren te combineren. Lukraak proberen heeft weinig zin, zeker niet als een opgave uit veel getallen bestaat.

1. Maak 24 met 3, 4, 5 en 7. Helaas staat de oplossing er niet bij!

Rekentuin maakt gebruik van een adaptief systeem waarbij kinderen opgaven krijgen die aangepast zijn aan hun niveau en waarbij ze altijd een vrij hoge kans (meestal 75%) op succes hebben. Eenvoudige opgaven bevatten slechts weinig getallen en een beperkt aantal bewerkingen, zoals 'maak 6 met 5, 1 en de bewerkingen + en –'. Eén van de moeilijkste opgaven in het Cijferspel is 'maak 24 met 1, 3, 4, 6 en de vier basisoperaties'.[2] In afbeelding 2 ziet u hoe het Cijferspel in Rekentuin eruitziet.
In het Cijferspel zitten 562 opgaven, die sinds november 2010 gemiddeld elk zo'n 15.000 keer zijn beantwoord door tienduizenden kinderen van uiteenlopende leeftijden. Dit levert een schat aan informatie op voor de wetenschap: hoe goed kunnen kinderen op deze manier rekenen, wat vinden ze moeilijk, hoe pakken ze deze opgaven aan en hoe gaan ze vooruit?
Het Cijferspel heeft ons inziens ook grote educatieve waarde. Het vereist probleemoplossend rekenvermogen en rekeninzicht. Bovendien levert het plezier en zelfvertrouwen op, ook bij zwakke rekenaars. Het spel biedt leerkrachten allerlei extra mogelijkheden in het rekenonderwijs. In dit artikel zullen we eerst wat dieper ingaan op de eigenschappen van het Cijferspel zelf. Dan zullen we enkele interessante resultaten bespreken. Tot slot gaan we in op de mogelijkheden die het Cijferspel in de groep biedt.

Een opgave uit het cijferspel: maak 17 met de getallen 2, 3, 5 en de vier basisoperaties. Welk getal moet worden gemaakt met welke getallen en operaties verschilt per opgave.

Klik je nu achtereenvolgens op 5, x, en 3, dan komt deze som met het antwoord 15 in het eerste wolkje. Het getal 15 komt bovendien in een nieuwe cirkel bovenaan te staan, voor verder gebruik.

Vervolgens maak je het af met 15 + 2 = 17 in het tweede wolkje. De resterende muntjes gaan in de geldzak. Door de wolkjes is het gebruik van lastige haakjes niet nodig.

2: Het Cijferspel in Rekentuin

Het cijferspel en de voetbalheuristiek

Er bestaat een intrigerende relatie tussen het Cijferspel en het eerlijk samenstellen van (voetbal)teams. Ieder kind weet hoe dit gaat. De twee beste spelers kiezen om de beurt een teamlid. Daarbij kiezen ze steeds voor de beste uit de nog overgebleven kinderen. Deze voor de zwakste speler pijnlijke methode, is een slimme strategie voor een buitengewoon lastig wiskundig probleem: *het partitieprobleem*.[3]

Het partitieprobleem betreft de vraag of, en zo ja hoe, we een willekeurige verzameling van positieve getallen (bijvoorbeeld 1, 2, 3, 4, 5, en 7) in twee groepen kunnen verdelen zodat de som van de getallen in beide groepen even groot is (1+3+7=2+4+5).

Het blijkt dat het oplossen van dergelijke puzzels heel tijdrovend is, zelfs als je dat automatisch door een computer laat doen. Het kost exponentieel meer tijd naarmate het aantal getallen toeneemt en de problemen dus complexer worden. De oplostijd kan zelfs voor middelmatig complexe problemen al oplopen tot miljarden jaren rekentijd voor een gewone computer. Het grappige is dat het controleren van een oplossing juist heel snel kan worden uitgevoerd: door de sommen van de twee verzamelingen te vergelijken. Dit type puzzels, waarbij het systematisch vinden van een oplossing exponentieel veel rekentijd kost, maar het controleren van het antwoord heel snel gaat, worden ook wel NP volledig genoemd.[4] Veel andere populaire puzzels zijn ook bewezen NP volledig, bijvoorbeeld Mastermind, Mijnenveger, Mah Jong en Lemmings.

Omdat er voor het partitieprobleem goed werkende vuistregels zijn, wordt het ook wel het makkelijkste zeer moeilijke probleem genoemd. Die vuistregels garanderen geen correcte oplossing, maar geven wel heel goede benaderingen. Zo'n niet-perfecte vuistregel heet een heuristiek. Eén heuristiek is om steeds het grootst overgebleven getal om de beurt aan één van de verzamelingen toe te kennen. En dat is precies wat onze jonge voetballertjes doen: beide partijen (verzamelingen) kiezen telkens de beste overgebleven speler (het grootste overgebleven getal)! Hun wat onaardige manier van de bepaling van eerlijke teams is een heel slimme.

De keuzen van de spelers

Nu terug naar het Cijferspel. Neem de Cijferspelopgave 'maak 0 met 11, 6, 4, 3, 2 en de bewerkingen + en -. De oplossing 11 + 2 –6 –4 - 3 impliceert het vormen van twee groepen getallen (11 en 2 versus 6, 4, en 3), waarvan de som gelijk is. Je kunt elk partitieprobleem dus als opgave van het Cijferspel weergeven. Daarmee is ook het Cijferspel NP volledig.[5]

Laten we eens een eenvoudig voorbeeld uit de Rekentuin bekijken. Het gaat om de opgave: maak 125 met 1, 2, 2, 20, 100 en de bewerkingen + en -. Deze opgave is tot en met 30 april 2013 maar liefst 45932 keer gespeeld, waarvan 38089 keer (83%) correct beantwoord. Het gaat hier om 897 verschillende correcte antwoorden. Echter, in 26999 (58%) van de gevallen begint het antwoord met 100. Verreweg het meest gekozen (19610 keer) correcte antwoord is 100 + 20 = 120 | 120 + 2 = 122 | 122 + 2 = 124 | 124 + 1 = 125. Met andere woorden: de meerderheid van de kinderen volgt hier de voetbalheuristiek.

Informatie uit de database

Zoals gezegd beschikken we over een enorme onderzoeksdatabase voor het Cijferspel. We kunnen vragen beantwoorden over de samenhang tussen scores op het Cijferspel en scores op meer traditionele hoofdrekentaken. We kunnen de verschillen tussen kinderen onderzoeken en vaststellen hoe de Cijferspelvaardigheid verandert met de leeftijd. Bovendien kunnen we onderzoeken wat de moeilijkheidsgraad van de opgaven is: welke opgaven worden snel en goed gemaakt en welke vereisen meer denktijd?

We kunnen zelfs achterhalen welke strategieën kinderen gebruiken om de Cijferspelopgaven op te lossen. We hebben daarvoor een aantal bronnen: de moeilijkheidsgraad van alle opgaven, de precieze goede en foute antwoorden die kinderen geven en de responstijden. De moeilijkheidsgraden van opgaven zijn bijzonder interessant. We kunnen alle opgaven ordenen op moeilijkheidsgraad en vervolgens proberen om deze volgorde te verklaren. We illustreren dit door naar een selectie van 28 opgaven te kijken die allemaal de getallen 1, 10 en 100 gebruiken, maar waarvoor het doelgetal, het getal dat moet worden gemaakt, verschilt. Afbeelding 3 geeft voor de verschillende opgaven de moeilijkheidsgraad weer. Het getal dat bij het punt in de grafiek staat stelt het doelgetal voor en op de y-as is af te lezen wat de moeilijkheidsgraad van deze opgave is.

Drie groepen opgaven

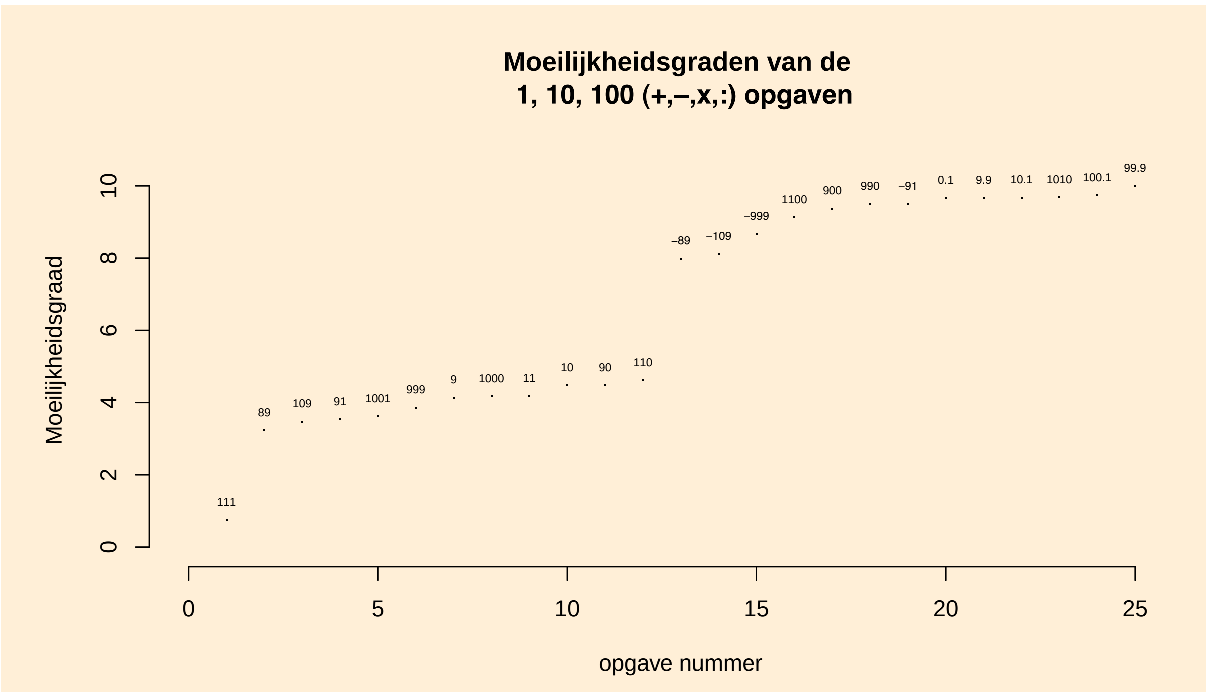
We zien hier een aantal opmerkelijke patronen. Opgaven lijken in dire groepen te clusteren. De eerste groep bestaat uit maar één opgave (met doelgetal 111) en vereist alleen een simpele optelling van alle getallen. De tweede groep bestaat uit allerlei opgaven, waarbij soms alleen optellen en aftrekken vereist is (89, 91, 109), maar soms ook vermenigvuldigen en delen (999, 1001, 11, 9). Alle sommen hebben echter gemeenschappelijk dat er eerst een getal wordt gemaakt van 100 en 10, waarna dit getal wordt gecombineerd met het kleinste getal 1. Het is verrassend dat een oplossing als 100:10 -1 niet wezenlijk moeilijker is dan 100+10-1!

De derde groep opgaven - de moeilijkste opgaven - bestaat uit 2 soorten. De eerste soort bestaat uit opgaven met decimale doelgetallen (10,1 en 9,9) en negatieve doelgetallen, zoals -89 (zie ook het kader).

In Rekentuin trekken we ons niet veel aan van de conventies over wat kinderen wanneer moeten leren. Als kinderen opgaven met negatieve getallen te moeilijk vinden, dan zullen deze opgaven vanzelf een zeer hoge moeilijkheidsgraad krijgen, waarna ze alleen aan goede rekenaars aangeboden worden. In het Cijferspel komen ook moeilijke opgaven voor waarbij machtsverheffen (^) vereist is.

Interessanter is de tweede soort moeilijke opgaven. Dit betreft de doelgetallen 900, 990, 1100 en 1010. Waarom zijn deze nou zoveel moeilijker dan bijvoorbeeld 999 en 1001? Het lijkt erop dat 999 en 1001 relatief makkelijk zijn, omdat kinderen hierbij de voetbalheuristiek kunnen volgen: eerst in de buurt komen met 100 x 10 en dan verder werken. Maar bij 1100 kom je met de eerste correcte bewerking nog helemaal niet in de buurt. Deze opgave vereist eerst een optelling van kleine getallen en tot slot pas een vermenigvuldiging:
10 + 1 = 11 | 11 x 100 = 1100. De voetbalheuristiek werkt hier dus niet!

3. Opgaven, weergegeven met hun doelgetal, variëren in moeilijkheidsgraad.



<table>
<tr><th>Beste</th><th>Vraag</th><th>Goed Antwoord</th><th>Gegeven Antwoord</th><th>Reactietijd</th></tr>
<tr><td>1</td><td>5 6 7 14 | + - x : | 8</td><td>6 - 5 = 1 | 7 - 1 = 6 | 14 - 6 = 8</td><td>14 - 7 = 7 | 7 + 6 = 13 | 13 - 5 = 8</td><td>7 sec.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>5 8 10 | + - x : | -7</td><td>10 + 5 = 15 | 8 - 15 = -7</td><td>10 + 5 = 15 | 8 - 15 = -7</td><td>7 sec.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3 4 5 6 7 | + - x : | 25</td><td>7 + 5 = 12 | 12 + 4 = 16 | 16 + 6 = 22 | 22 + 3 = 25</td><td>7 + 6 = 13 | 13 + 5 = 18 | 18 + 4 = 22 | 22 + 3 = 25</td><td>10 sec.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4 6 10 | + - x : | -12</td><td>10 + 6 = 16 | 4 - 16 = -12</td><td>10 + 6 = 16 | 4 - 16 = -12</td><td>7 sec.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5 8 10 | + - x : | -7</td><td>10 + 5 = 15 | 8 - 15 = -7</td><td>10 + 5 = 15 | 8 - 15 = -7</td><td>9 sec.</td></tr>
<tr><th>Slechtste</th><th>Vraag</th><th>Goed Antwoord</th><th>Gegeven Antwoord</th><th>Reactietijd</th></tr>
<tr><td>1</td><td>7 9 11 14 | + - x : | 27</td><td>14 + 9 = 23 | 11 - 7 = 4 | 23 + 4 = 27</td><td>14 + 11 = 25 | 25 + 7 = 32 | 32 - 9 = 23</td><td>12 sec.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4 1 3 | + - x : | 16</td><td>3 + 1 = 4 | 4 x 4 = 16</td><td>1 x 4 = 4 | 3 x 4 = 12</td><td>18 sec.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2 4 7 | + - x : | -5</td><td>4 - 2 = 2 | 2 - 7 = -5</td><td>7 + 2 = 9 | 9 - 4 = 5</td><td>17 sec.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1 3 4 7 70 | + - x : | 84</td><td>70 - 4 = 66 | 7 - 1 = 6 | 6 x 3 = 18 | 66 + 18 = 84</td><td>70 + 7 = 77 | 77 + 4 = 81 | 81 + 3 = 84 | 84 - 1 = 83</td><td>14 sec.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>4 5 1 | + - x : | 24</td><td>5 + 1 = 6 | 6 x 4 = 24</td><td>5 x 1 = 5 | 5 x 4 = 20</td><td>20 sec.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>1 10 100 | + - x : | 1100</td><td>10 + 1 = 11 | 100 x 11 = 1100</td><td>100 + 1 = 101 | 101 x 10 = 1010</td><td>17 sec.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>5 20 100 | + - x : ^ | 104</td><td>20 : 5 = 4 | 100 + 4 = 104</td><td>¿</td><td>37 sec.</td></tr>
<tr><td>8</td><td>5 7 10 | + - x : ^ | 5</td><td>10 : 5 = 2 | 7 - 2 = 5</td><td>¿</td><td>22 sec.</td></tr>
<tr><td>9</td><td>4 15 60 | + - x : ^ | 30</td><td>60 : 4 = 15 | 15 + 15 = 30</td><td>¿</td><td>14 sec.</td></tr>
<tr><td>10</td><td>3 4 8 15 | + - x : ^ | 1</td><td>4 + 3 = 7 | 8 + 7 = 15 | 15 : 15 = 1</td><td>¿</td><td>10 sec.</td></tr>
</table>

4. De vijf beste en tien slechtste antwoorden van een kind in Rekentuin. Op de laatste vier opgaven heeft het kind met het vraagteken geantwoord (zie afbeelding 2). Het krijgt dan het correcte antwoord te zien. Merk op dat ook de eerder besproken opgave 1, 10, 100 (+, -, x,:) 1100 in zijn nachtmerrielijst staat. Het opgavetype van de tweede nachtmerriesom 4, 1, 3 (+, -, x,:) 16 komt ook veelvuldig voor in het Cijferspel. Een ander voorbeeld van zo'n opgave is 2, 7, 8 (+, -, x,:) 42. Dit zijn eigenlijk verborgen tafelsommen. Deze vinden kinderen erg lastig, mede omdat de voetbalheuristiek niet werkt: als je begint met 8 x 7 kom je er niet.

De educatieve mogelijkheden van het Cijferspel

Het Cijferspel laat kinderen op een speelse en creatieve manier oefenen met hoofdrekenen. Op een school in New York waar de 24 game een aantal weken lang regelmatig werd gespeeld, gingen de kinderen hoger scoren op een hoofdrekentoets (Elay, 2009).

Het Cijferspel zit in de zogenaamde bonustuin van Rekentuin, wat betekent dat kinderen het kunnen spelen als ze spelletjes uit de basistuin met voldoende resultaat gespeeld hebben.[7] Leerkrachten kunnen per kind zien welke opgaven zij goed kunnen ('droomsommen') en welke zij juist heel moeilijk vinden (en 'nachtmerries'). De afbeelding boven aan de pagina geeft een voorbeeld van de 'droomsommen' en 'nachtmerries' van een willekeurig kind uit Rekentuin.

De opgaven uit het Cijferspel van Rekentuin lenen zich prima voor klassikale behandeling op het Digibord. De leerkracht kan hiervoor zijn of haar eigen account gebruiken. Andere mogelijkheden zijn om het Cijferspel buiten de Rekentuin te spelen. De leerkracht kan zelf opgaven verzinnen en op het bord schrijven. Kinderen kunnen tegen elkaar spelen of in teams. Dit dwingt ze om hun rekenprocessen te verwoorden. Verder kun je er bijvoorbeeld een kaartspel van maken: de opgave op de voorkant, de oplossing op de achterkant. Welk kind verzamelt de hoogste stapel? Kinderen kunnen deze kaarten ook zelf maken.

Nieuwe, leuke opgaven zijn welkom. Deze plaatsen wij graag in het Cijferspel.

Al met al zijn we ervan overtuigd dat het Cijferspel een interessante toevoeging is op de verschillende hoofdrekenspelletjes in Rekentuin, omdat probleemoplossend en creatief rekenen centraal staan.

Han L.J. van der Maas is hoogleraar Psychologische Methodenleer UvA, Wetenschappelijk directeur Oefenweb.nl,
Sanne van der Ven is Postdoc Psychologische Methodenleer UvA
Vera van der Molen is ontwikkelaar Rekentuin/Taalzee

Noten

1. http://www.24game.com. Zie ook De Moor en Treffers(1996). Nog eerder kwam het spel voor in het populaire televisieprogramma Cijfers en Letters.
2. We geven de oplossing niet! Niet veel mensen weten de oplossing binnen een uur te vinden. Uiteraard biedt internet uitkomst.
3. Voor een zeer lezenswaardige uitleg zie: http://www.americanscientist.org/issues/pub/2002/3/the-easiest-hard-problem
4. http://nl.wikipedia.org/wiki/NP-volledig
5. Dit inzicht en het formele bewijs voor de NP volledigheid van het Cijferspel werd ons geleverd door Lena Kurzen.
6. Hoeveel combinaties er precies zijn is op zichzelf al een leuke puzzel omdat sommige operaties niet symmetrisch zijn (-, :), we rekening moeten houden met de volgorde van operaties en we haakjes mogen gebruiken, zoals bijvoorbeeld in (6+3)*(13-4)=81
7. Leerkrachten kunnen dit eenvoudig aanpassen. Ze kunnen in de 'backend' van Rekentuin spelletjes naar eigen inzicht in de basis- of bonustuin plaatsen. Zie: http://app.rekentuin.nl/manuals/game_availability

Verder lezen

Eley, J. (2009). How much does the 24-game increase the recall of arithmetic facts? http://eric.ed.gov/PDFS/ED508367.pdf.

Kurzen, L. (2011). Some ideas for the Numbers Task. Intern rapport Universiteit van Amsterdam.

Moor, E. de, & Treffers, A. (1996). Het 24 spel. *Panamapost, 15*, 45-48.